数理解析研究所講究録
40巻 1968年 1-14

Semi-groups of operators in locally convex spaces

東京女子大 文理 高村 多賀子

§1. 序文

本稿では、局所凸線形位相空間における線形作用素の作る半群で、必ずしも同等連続でない場合について論ずる。

従来のBanach空間における作用素の作る半群の理論は、近年 L. Schwartz [5], 宮寺 [4], 吉田 [6], 小松 [2] その他により局所凸空間における作用素の作る同等連続な半群の場合に拡張されたが、その議論はBanach空間の場合とほゞ平行になされた。すなわち $\{T_t; t \geq 0\}$ を局所凸空間 E における同等連続な半群とし、A をその生成作用素とすると、$Re(\lambda) > 0$ なる複素数 λ に対して、T_t の Laplace 変換と A の resolvent が存在して

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x \, dt = (\lambda I - A)^{-1} x, \qquad x \in E$$

が成立し、この関係が上の理論において核心をなしていた。

しかるに同等連続でない半群の場合には、その Laplace 変換も生成作用素の resolvent も、もはや必ずしも存在しないの

で異った取扱いが必要となる．ここでは，一般 Laplace 変換の概念を導入することにより，いわゆる Hille−Yosida の定理に相当するものが得られることを示そう。

詳細は高村［3］を参照のこと．

§2. 作用素の半群

E を局所凸線形位相空間とし，$L(E,E)$ を E から E の中への連続線形作用素の全体とする．

<u>定義</u>. 作用素の族 $\{T_t\,;\, t\geq 0\}\subset L(E,E)$ は次の条件 (1), (2), (3) をみたすとき<u>半群</u>と呼ばれる．

(1) $T_t T_s = T_{t+s}, \quad t, s\geq 0,$

(2) $T_0 = I$

(3) $\lim_{t\to s} T_t x = T_s x, \quad s\geq 0,\ x\in E.$

さらに，半群 $\{T_t\,;\, t\geq 0\}$ は任意の $0<s<\infty$ に対して，部分族 $\{T_t\,;\, 0\leqq t\leqq s\}$ が同等連続（すなわち，E の任意の semi-norm p に対して，E の他の semi-norm q が存在して，すべての $0\leqq t\leqq s$, $x\in E$ に対して $p(T_t x)\leqq q(x)$ が成立する）のとき，<u>局所同等連続</u>と呼ばれ，$\{T_t\,;\, t\geq 0\}$ 自身が同等連続のとき<u>同等連続</u>と呼ばれる．

［注意］ もしも E が tonnelé ならば，半群 $\{T_t\,;\, t\geq 0\}$ はすべ

て局所同等連続になる．

半群 $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ の生成作用素 A は

$$Ax=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T_h-I)x$$

によって，右辺の極限が E の中に存在するときに定義される。A の定義域を $D(A)$ とかく．このとき同等連続な半群の場合と同様にして次の基本的な一連の命題が成立する．

命題 2.1. $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ を局所凸空間 E における半群とするとき，もし $x\in D(A)$ ならば $T_tx\in D(A)$, $t\geqq 0$ かつ T_tx は t について連続的微分可能で

$$\frac{d}{dt}T_tx=AT_tx=T_tAx,\quad t\geqq 0$$

が成立する．また $x\in D(A)$ かつ $Ax=y$ となるための必要十分条件は

$$T_tx-x=\int_0^t T_sy\,ds,\qquad t\geqq 0$$

が成立することである．

［注意］ この命題には E の点列完備性が仮定されていない。

系. E が点列完備のとき $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ を E における半群とすると，各 $x\in E$ について $\int_a^b T_sx\,ds\in D(A)$, $(0\leqq a,\ b<\infty)$ かつ $A\int_a^b T_sx\,ds=T_bx-T_ax$ が成立する。

命題 2.2. $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ を局所凸空間 E における半群とする．もし E が点列完備ならば $D(A)$ は E で稠密である．またもし $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ が局所同等連続ならば A は閉作用素である。

§3. 共役半群

Eを点列完備な局所凸空間, E'をその共役空間とする。$\{T_t; t\geq 0\}$ をEにおける半群とし, その生成作用素をAとする. このときT_tの共役作用素T_t^*からなる族$\{T_t^*; t\geq 0\}$は, E'において弱位相$\sigma(E',E)$に関して一つの半群をなし, その生成作用素は丁度Aの共役作用素A^*と一致する。ところで強位相$\beta(E',E)$に関してはどうかというと, $E'\ni x'$に対してT_t^*x'が必ずしも, tについて連続とはならないため, $\{T_t^*; t\geq 0\}$はE'全体では$\beta(E',E)$に関して半群をなさないが, E'が$\beta(E',E)$-点列完備ならばE'のある部分空間をとってくると, $\beta(E',E)$から導入された位相に関して半群になっている. すなわち,

<u>定理1.</u> Eは点列完備, E'は$\beta(E',E)$-点列完備とす. $\{T_t; t\geq 0\}$をEにおける半群とし, その生成作用素をAとする。このとき$D(A^*)$のE'における$\beta(E',E)$-閉包$\overline{D(A^*)}$はT_t^*x'がtについて$\beta(E',E)$-連続となるような$x'\in E'$の全体と一致し, T_t^*の$\overline{D(A^*)}$における制限T_t^+を考えると, $\{T_t^+; t\geq 0\}$は$\overline{D(A^*)}$において$\beta(E',E)$から導入された位相に関して半群をなし, その生成作用素A^+は値域が$\overline{D(A^*)}$に入るようなA^*の制限のうちの最大なものと一致する。とくに$\{T_t; t\geq 0\}$が局所同等連続であるか, あるいは同等連続であるかに従って, $\{T_t^+; t\geq 0\}$も局所同等連続, あるいは同等連続となる。

系. Eが回帰的のとき, $\{T_t; t\geqq 0\}$ をEにおける半群, Aをその生成作用素とすると, $\{T_t^*; t\geqq 0\}$ は E' において $\beta(E', E)$ に関する半群をなし, その生成作用素は A^* に一致する.

§4. 一般 Laplace 変換

$\mathcal{D}$ を $R^1=(-\infty,\infty)$ で定義された複素数値無限回連続微分可能で compact な台をもつ函数の空間とし, $\mathcal{D}_{[-k,k]}$, $0<k<\infty$, あるいは $\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$, $-\infty<a<\infty$ を台が $[-k,k]$, あるいは $(-\infty,a]$ に入るような $\mathcal{D}$ の元の全体とし, これらに通常の位相を導入する.

各 $\varphi\in\mathcal{D}$ に対し, 共役 Laplace 変換 $\hat{\varphi}$ を

$$\hat{\varphi}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt \qquad (\lambda: \text{複素数})$$

で定義すると

$$\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)^{\wedge}=-\lambda\hat{\varphi}, \qquad \frac{d}{d\lambda}\hat{\varphi}=(t\varphi)^{\wedge}$$

が成立する。

変換 $\varphi\longrightarrow\hat{\varphi}$ による $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{[-k,k]}$, $\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ の像をそれぞれ $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{[-k,k]}$, $\mathbb{D}_{(-\infty,a]}$ とする. Paley-Wiener の定理から, $\mathbb{D}_{[-k,k]}$ は整函数 $\hat{\varphi}(\lambda)$ で, 任意の整数 $N\geqq 0$ に対して 数 $C=C(N)>0$ が存在して

$$|\hat{\varphi}(\lambda)|\leqq C(1+|\lambda|)^{-N}e^{k|\mu|} \qquad (\lambda=\mu+i\nu)$$

が成立するようなものの全体と一致している。 $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{[-k,k]}$,

$\mathbb{D}_{[-\infty,a]}$ には，それぞれ $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{[-k,k]}$, $\mathcal{D}_{[-\infty,a]}$ と位相同形になるような位相を入れる.

さて，E を点列完備な局所凸空間とし，$a>0$ を一つ固定する．このとき $\mathcal{D}_{[-\infty,0]}\subset\mathcal{D}_{[-\infty,a]}$, $\mathbb{D}_{[-\infty,0]}\subset\mathbb{D}_{[-\infty,a]}$ である．$\mathcal{D}_{[-\infty,a]}$ から E の中への連続線形作用素の全体 $L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)$ を考え，$\mathcal{D}_{[-\infty,a]}$ のすべての有界集合上の一様収束位相を入れる．$L(\mathbb{D}_{[-\infty,a]},E)$ についても同様。

$$\mathcal{D}'_a(E)=\{F\in L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)\ ;\ F(\varphi)=0\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}_{[-\infty,0]}\},$$

$$\mathbb{D}'_a(E)=\{\hat{F}\in L(\mathbb{D}_{[-\infty,a]},E)\ ;\ \hat{F}(\hat{\varphi})=0\quad\forall\hat{\varphi}\in\mathbb{D}_{[-\infty,0]}\}.$$

とおき，これらに $L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)$, $L(\mathbb{D}_{[-\infty,a]},E)$ からの位相を導入する。

各 $F\in L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)$ に対して，その一般 Laplace 変換 $\hat{F}$ が

$$\hat{F}(\hat{\varphi})=F(\varphi),\qquad \hat{\varphi}\in\mathbb{D}_{[-\infty,a]}$$

によって，$L(\mathbb{D}_{[-\infty,a]},E)$ の元として定義される。このとき対応 $F\longleftrightarrow\hat{F}$ によって $L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)$ と $L(\mathbb{D}_{[-\infty,a]},E)$, さらに $\mathcal{D}'_a(E)$ と $\mathbb{D}'_a(E)$ は位相同形になっている。この二つの空間 $\mathcal{D}'_a(E)$ と $\mathbb{D}'_a(E)$ が我々の理論において重要な役割を演ずるのである。

$f\in L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]};C^1)$ (C^1は複素数空間) と $x\in E$ に対し，$f\otimes x$ を

$$(f\otimes x)(\varphi)=\langle\varphi,f\rangle x,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_{[-\infty,a]}$$

によって定義すると，$f\otimes x\in L(\mathcal{D}_{[-\infty,a]},E)$ である。とくに

Dirac 測度 $\delta \in \mathcal{D}'$ に対して $\delta \otimes x \in \mathcal{D}'_a(E)$. 他方 $\hat{f}(\lambda)$ を $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ で正則な関数で一つの元 $\hat{f} \in \mathbb{D}'$ を定義しているものとするとき, $\hat{f} \otimes x$, $x \in E$ を

$$(\hat{f} \otimes x)(\hat{\varphi}) = \langle \hat{\varphi}, \hat{f} \rangle x = \left(\frac{1}{i} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \right) x,$$

$$\hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty, a]}, \quad \mu > 0$$

によって定義すると, $\hat{f} \otimes x \in L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)$. とくに $(\delta \otimes x)^\wedge = 1 \otimes x \in \mathbb{D}'_a(E)$.

$F \in \mathcal{D}'_a(E)$ の微分 $\frac{d}{dt} F \in \mathcal{D}'_a(E)$ は

$$\left(\frac{d}{dt} F\right)(\varphi) = - F\left(\frac{d}{dt} \varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって, 同じく $\hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ の微分 $\frac{d}{d\lambda} \hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ は

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \hat{F}\right)(\hat{\varphi}) = - \hat{F}\left(\frac{d}{d\lambda} \hat{\varphi}\right), \quad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty, a]}$$

によって定義される. $\frac{d}{dt}, \frac{d}{d\lambda}$ はそれぞれ $\mathcal{D}'_a(E)$, $\mathbb{D}'_a(E)$ において連続な作用素である.

$F \in \mathcal{D}'_a(E)$ に t をかけること $t F \in \mathcal{D}'_a(E)$ は

$$(t F)(\varphi) = F(t \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって, $\hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ に λ をかけること $\lambda \hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ は

$$(\lambda \hat{F})(\hat{\varphi}) = \hat{F}(\lambda \hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty, a]}$$

によって定義され, この作用素 t, λ はそれぞれ $\mathcal{D}'_a(E)$, $\mathbb{D}'_a(E)$ において連続である. このとき

$$\lambda \hat{F} = \left(\frac{d}{dt} F\right)^\wedge, \quad \frac{d}{d\lambda} \hat{F} = (-t F)^\wedge, \quad F \in \mathcal{D}'_a(E)$$

が成立する.

§5. 一般 resolvent

Eを点列完備とす. $S_t\ (t\geq 0)$ を $L(E,E)$ における局所同等連続な族で, 各 $x\in E$ に対し $S_t x$ が $t\geq 0$ について連続とする。このとき各 $F\in\mathcal{D}'_a(E)$ に対し合成積 $F*S_t\in\mathcal{D}'_a(E)$ が

$$(F*S_t)(\varphi)=\int_0^\infty S_t(F(\tau_{-t}\varphi))\,dt\ \left(=\int_0^a S_t(F(\tau_{-t}\varphi))\,dt\right),\quad \varphi\in\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義される。ただし $\tau_{-t}\varphi(s)=\varphi(s+t)$. そして変換 $F\to F*S_t$ は $\mathcal{D}'_a(E)$ において連続となる。

さて, $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ をEにおける局所同等連続な半群とし, これを $t<0$ に対しては $T_t=0$ とおいて拡張し $\{T_t\,;\,-\infty<t<\infty\}$ を作ると, 各 $x\in E$ に対して $T_t x$ は $\mathcal{D}'_a(E)$ の元として考えられる。そして

$$(5.1)\qquad F*\underbrace{T_t*T_t*\cdots*T_t}_{n}=F*\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}T_t,\qquad F\in\mathcal{D}'_a(E),\ n=1,2,3,\cdots,$$

$$(5.2)\qquad (\delta\otimes x)*\underbrace{T_t*T_t*\cdots*T_t}_{n}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}T_t x,\qquad x\in E,\ n=1,2,3,\cdots$$

が成立する。とくに $(\delta\otimes x)*T_t=T_t x$.

$\mathcal{D}'_a(E)$ における変換 $F\to F*T_t$ に対応して, $\mathbb{D}'_a(E)$ においては作用素 $\mathbb{R}$ を考える. すなわち

$$\mathbb{R}\hat{F}=(F*T_t)^\wedge,\qquad \hat{F}\in\mathbb{D}'_a(E)$$

によって $\mathbb{D}'_a(E)$ から $\mathbb{D}'_a(E)$ の中への作用素 $\mathbb{R}$ を定義すると, $\mathcal{D}'_a(E)$ で $F\to F*T_t$ を考えることと, $\mathbb{D}'_a(E)$ で $\mathbb{R}\,;\,\hat{F}\to(F*T_t)^\wedge$ を考えることとは同意義になり, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{D}'_a(E)$ で連続である。実は, この $\mathbb{R}$ が $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ の生成作用素 A の一般 resolvent (後述)

に一致するのである。

(5.1), (5.2) に対応して

(5.3) $\mathbb{R}^n\hat{F} = (F * \underbrace{T_t * \cdots * T_t}_{n})^\wedge = \{F * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t\}^\wedge,\quad \hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E),\ n=1,2,3,\cdots,$

(5.4) $\mathbb{R}^n(1 \otimes x) = \{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t x\}^\wedge,\quad x \in E,\ n=1,2,3,\cdots,$

とくに $\mathbb{R}(1 \otimes x) = (T_t x)^\wedge$ が成立する。 また (5.4) より

(5.5) $\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbb{R}(1 \otimes x) = (-1)^n n!\, \mathbb{R}^{n+1}(1 \otimes x),\quad x \in E,\ n=1,2,3,\cdots$

が得られる。

<u>定義</u> A を E における線形作用素とする。$\mathcal{D}'_a(E)$ における線形作用素 $\mathcal{A}$ を, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ に対して $F(\varphi) \in D(A)$ かつ変換 $\varphi \to A(F(\varphi))$ が $\mathcal{D}'_a(E)$ に属するような $F \in \mathcal{D}'_a(E)$ に対し

$$(\mathcal{A}F)(\varphi) = A(F(\varphi)),\quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義する。同様に $\mathbb{D}'_a(E)$ における線形作用素 $\mathbb{A}$ を, 任意の $\hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]}$ に対して $\hat{F}(\hat{\varphi}) \in D(A)$ かつ変換 $\hat{\varphi} \to A(\hat{F}(\hat{\varphi}))$ が $\mathbb{D}'_a(E)$ に属するような $\hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ に対して

$$(\mathbb{A}\hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\hat{\varphi})),\quad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義する。$\mathcal{A}, \mathbb{A}$ の定義域を $D(\mathcal{A}), D(\mathbb{A})$ とかく。もし作用素 $(\lambda - \mathbb{A})$ に対し $\mathbb{D}'_a(E)$ 上で定義された連続な逆作用素 $(\lambda - \mathbb{A})^{-1}$ が存在するとき, これを A の<u>一般 resolvent</u> と呼ぶ。

この定義から $F \in D(\mathcal{A})$ であることと $\hat{F} \in D(\mathbb{A})$ であることとは同値であり, このとき $\mathbb{A}\hat{F} = (\mathcal{A}F)^\wedge$ が成立する。

<u>命題 5.1</u> A を E における線形作用素とする。もし A が閉作

用素ならば $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ はそれぞれ $\mathscr{D}'_a(E)$, $\mathbb{D}'_a(E)$ において閉作用素である。もし $D(A)$ が E で稠密ならば $D(\mathcal{A})$, $D(\mathbb{A})$ はそれぞれ $\mathscr{D}'_a(E)$, $\mathbb{D}'_a(E)$ で稠密である。

さて $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ を E における局所同等連続な半群とし，A をその生成作用素とすると，§2 で述べたように，A は閉で，$D(A)$ は E で稠密であるから，$\mathscr{D}'_a(E)$ において $\mathcal{A}$ は閉，$D(\mathcal{A})$ は稠密，$\mathbb{D}'_a(E)$ において $\mathbb{A}$ は閉，$D(\mathbb{A})$ は稠密となる。

そして

<u>定理 2.</u> E を点列完備とし，$\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ を E における局所同等連続な半群，A をその生成作用素とすると，A の一般 resolvent $(\lambda-\mathbb{A})^{-1}$ が存在して $\mathbb{R}$ にひとしい。

§6. Hille－Yosida の定理

<u>定義</u> E を点列完備とし，$\hat{F}\in\mathbb{D}'_a(E)$ とする。複素数平面 C^1 の右半面 $Re(\lambda)>0$ における E－値正則関数 $\hat{F}(\lambda)$ が $\hat{F}$ の<u>表現</u>であるとは

$$\hat{F}(\hat{\varphi})=\frac{1}{i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\hat{\varphi}(\lambda)\,\hat{F}(\lambda)\,d\lambda,\qquad \forall\hat{\varphi}\in\mathbb{D}_{(-\infty,a]},\ \forall\mu>0$$

が成立するときをいう。次に E における線形作用素 A の一般 resolvent $(\lambda-\mathbb{A})^{-1}$ が存在しているとき，$Re(\lambda)>0$ において定義された $L(E,E)$－値関数 $R(\lambda)$ が $(\lambda-\mathbb{A})^{-1}$ の

表現であるとは, すべての $x \in E$ に対して $R(\lambda)x$ が $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ における E-値正則関数で, かつ $(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x)$ の表現になっているときにいう。

このとき Hille–Yosida の定理は次の形に述べられる。

定理3. E を点列完備とする。このとき E における線形作用素 A が, 一意に決定される局所同等連続な半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ の生成作用素であるための必要十分条件は, A が次の二条件を満足することである。

1) A は稠密な定義域 $D(A)$ をもつ閉作用素である。

2) 任意の $a > 0$ に対し空間 $\mathcal{D}'_a(E)$ において次の条件が満たされる:

(a) A の一般 resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が存在する。

(b) $(\lambda - A)^{-1}$ の表現 $R(\lambda)$ で, 族 $\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu) ;\ \mu > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$ が同等連続であるようなものが存在する。

[注意] 十分条件に関しては, 2) はある一つの $a > 0$ に対して満たされていればよい。

[証明の概略]

必要性: A が局所同等連続な半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ の生成作用素であるとき, 1) と 2) の (a) が成立することはすでに述べた。さらに

$$R(\lambda) x = \int_0^a e^{-\lambda t} T_t x \, dt, \quad x \in E$$

とおくと，$R(\lambda)$ が 2) の (ε) を満たすことが容易にたしかめられる。

十分性：いま A が 1) と一つの $a>0$ に対して 2) を満足すると仮定する。

Heaviside 関数を Y とする。すなわち $t\geq 0$ で $Y(t)=1$，$t<0$ で $Y(t)=0$．一方，作用素 $\boldsymbol{\lambda}$ に対し，$\mathcal{D}'_a(E)$ で連続な逆作用素 $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ が存在し

$$\boldsymbol{\lambda}^{-n}(1\otimes x)=\left\{(\delta\otimes x)*\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right\}^{\wedge}=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\otimes x\right\}^{\wedge},\quad x\in E,\ n=1,2,\cdots$$

が成立する。ただし $(\delta\otimes x)*\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\in\mathcal{D}'_a(E)$ は

$$\left((\delta\otimes x)*\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right)(\varphi)=(\delta\otimes x)_t\left(\left\langle\tau_{-t}\varphi,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\right\rangle\right),\quad \varphi\in\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$$

で定義される。

$x\in D(A^3)$ に対し

$$(\boldsymbol{\lambda}-A)^{-1}(1\otimes x)=\boldsymbol{\lambda}^{-1}(1\otimes x)+\boldsymbol{\lambda}^{-2}(1\otimes Ax)+\boldsymbol{\lambda}^{-3}(1\otimes A^2x)+\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-A)^{-1}(1\otimes A^3x)$$

と書け，$\boldsymbol{\lambda}^{-1}(1\otimes x)$，$\boldsymbol{\lambda}^{-2}(1\otimes Ax)$，$\boldsymbol{\lambda}^{-3}(1\otimes A^2x)$ の一般逆 Laplace 変換は上式より，$Y\otimes x$，$tY\otimes Ax$，$\frac{t^2}{2!}Y\otimes A^2x$ である。$\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-A)^{-1}(1\otimes A^3x)$ に関してはどうかというと，

$$S_t x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}e^{t\lambda}\frac{1}{\lambda^3}R(\lambda)(A^3x)\,d\lambda,\quad \mu>0$$

とおくと，(ε) より各 $\mu_0>0$ に対して，$R(\lambda)x$ が $Re(\lambda)\geq\mu_0$ で有界となることから，右辺の積分は絶対収束し，その値は $\mu>0$ に無関係である。また S_tx は t について連続微分可能で，$t\leq 0$ で $S_tx=0$ となるから，S_tx は $\mathcal{D}'_a(E)$ の一つの元であり，$\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-A)^{-1}(1\otimes A^3x)$ の一般逆 Laplace 変換となる。

$$T_t x = Y(t)x + tY(t)Ax + \frac{t^2}{2!}Y(t)A^2x + S_t x, \quad t \leqq a$$

とおくと，$\{T_t\,;\, t\leqq a\}$ は $D(A^3)$ において同等連続となることが証明され，また $D(A^3)$ は E で稠密となるので，$\{T_t\,;\, t\leqq a\}$ を E で同等連続に拡張出来，拡張したものを同じく T_t で表わすと，各 $x\in E$ に対して $T_t x$ は $(\lambda-A)^{-1}(1\otimes x)$ の一般化 Laplace 変換となる。さらに $x\in D(A)$ ならば $T_t x\in D(A)$ かつ

$$\frac{d}{dt}T_t x = AT_t x = T_t Ax, \quad 0\neq t\leqq a$$

なることがいえ，これから $\{T_t\,;\, 0\leqq t\leqq a\}$ の半群性 $T_{t+s}=T_tT_s$ が得られ，この性質を用いて T_t を $t>a$ に拡張して得られた局所同等連続な半群 $\{T_t\,;\, t\geqq 0\}$ に対して，A はその生成作用素となっている。

文献.

[1] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).

[2] H. Komatsu, Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230-262.

[3] T. Kōmura, Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Anal., to appear.

[4] I. Miyadera, Semi-groups of operators in Fréchet space and

applications to partial differential equations, Tôhoku Math. J., 11 (1959), 162–183.

[5] L. Schwartz, Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups, Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[6] K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1965.